УДК 517.9

НЕСИНГУЛЯРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА УЛЬТРАПРОИЗВЕДЕНИЯХ АЛГЕБР ФОН НЕЙМАНА

С.Г. Халиуллин[1]

1 *samig.haliullin@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Вводится понятие эргодического относительно нормального состояния действия группы на абелеву алгебру фон Неймана и изучаются его свойства. Также рассматривается ультрапроизведение таких преобразований по А. Оспеапи.

Ключевые слова: ультрапроизведения, алгебра фон Неймана, несингулярные преобразования.

Введём вначале необходимые определения и предварительные результаты.

Определение 1. ([3]) *Пусть $\mathscr{M}$ – алгебра фон Неймана, φ и ψ – два нормальных состояния на $\mathscr{M}$. Состояния φ и ψ называются эквивалентными, если $\varphi(x^*x) = 0 \Leftrightarrow \psi(x^*x) = 0$, $x \in \mathscr{M}$.*

Заметим, что определение эквивалентности нормальных состояний на алгебре фон Неймана достаточно задать на проекторах (см., напр., [2]).

Пусть далее G – сепарабельная локально компактная группа, $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ – вероятностное пространство.

Определение 2. ([7]) *Действием группы G на пространстве (Ω, μ) называется измеримое отображение $T : (s,\omega) \in G \times \Omega \to T_s(\omega) \in \Omega$ такое, что*
1. для каждого фиксированного $s \in G$ отображение $\omega \to T_s(\omega)$ является несингулярной биекцией Ω;
2. $T_s(T_t(\omega)) = T_{st}(\omega)$, $s, t \in G$, $\omega \in \Omega$;
3. $T_e(\omega) = \omega$, где e – единица группы G.

Пространство (Ω, μ) называется при этом G-измеримым пространством и обозначается (G, Ω, μ).

Определение 3. *Говорят, что действие T группы G на пространстве (Ω, μ) квазиинвариантно (или несингулярно), если для $E \in \mathscr{F}$ $\mu(E) = 0 \Leftrightarrow \mu(T_s(E)) = 0$ для любого $s \in G$; свободно (по отношению к μ), если для любого компактного подмножества $K \subseteq G$ такого, что $e \notin K$ и любого $E \in \mathscr{F}$, $\mu(E) > 0$, существует $F \subset E$, $\mu(F) > 0$, и $\mu(F \bigcap T_s(F)) = 0$ для всех $s \in G$. Действие T называется эргодическим (по отношению к μ), если условие $\mu(E \Delta T_s(E)) = 0$ для всех $s \in G$ влечёт $\mu(E) = 0$ либо $\mu(\Omega \setminus E) = 0$.*

С пространством (G, Ω, μ) свяжем действие α группы G на абелевой алгебре фон Неймана $\mathscr{A} = L^\infty(\Omega)$, заданное следующим образом:

$$\alpha_s(f)(\omega) = f(T_s^{-1}\omega),\ s \in G,\ f \in \mathscr{A},\ \omega \in \Omega.$$

Определение 4. *Зададим на алгебре $\mathscr{A} = L^\infty(\Omega)$ нормальное состояние φ. Скажем, что действие α несингулярно по отношению к состоянию φ, если для $f \in \mathscr{A}$ $\varphi(f) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\alpha_s(f)) = 0$ для любого $s \in G$; свободно, если для любого компактного подмножества*

$K \subseteq G$ такого, что $e \notin K$ и любого ненулевого проектора $g \in \mathscr{A}$ существует ненулевой проектор $f \in \mathscr{A}$, $f \le g$, и $\varphi(f\alpha_s(f)) = 0$ для всех $s \in G$. Действие α группы G на алгебре $\mathscr{A}$ назовём эргодичным по отношению к состоянию φ, если для проектора f условие $\alpha_s(f) = f$ для всех $s \in G$ влечёт $\varphi(f) = 0$ либо $\varphi(\mathbf{1} - f) = 0$.

Теорема 1. (Теорема дихотомии) *Пусть на алгебре $\mathscr{A} = L^\infty(\Omega)$ заданы два нормальных состояния φ и ψ, при этом действие α группы G на алгебре $\mathscr{A}$ является эргодичным по отношению к этим двум состояниям. Тогда состояния φ и ψ либо эквивалентны, либо сингулярны.*

Рассмотрим далее ультрапроизведения G-измеримых пространств. Начнём с ультрапризведений банаховых пространств.

Определение 5. ([5]) *Рассмотрим последовательность $(H_n, \|\cdot\|)_{n\in\mathbb{N}}$ банаховых пространств, и пусть $\mathscr{U}$ – нетривиальный ультрафильтр в множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Ультрапроизведение $(H_n)_{\mathscr{U}}$ есть фактор-пространство $l^\infty(\mathbb{N}, H_n)/\mathscr{N}_{\mathscr{U}}$, где*

$$l^\infty(\mathbb{N}, H_n) = \{(h_n), h_n \in H_n : \sup_n \|h_n\| < \infty\}, \quad \mathscr{N}_{\mathscr{U}} = \{(h_n) \in l^\infty(\mathbb{N}, H_n) : \lim_{\mathscr{U}} \|h_n\| = 0\}.$$

Обозначим элементы пространства $(H_n)_{\mathscr{U}}$ через $(h_n)_{\mathscr{U}}$. Тогда соотношение $\|(h_n)_{\mathscr{U}}\| = \lim_{\mathscr{U}} \|h_n\|$ определяет норму на $(H_n)_{\mathscr{U}}$, и в этом случае $((H_n)_{\mathscr{U}}, \|\cdot\|)$ становится банаховым пространством.

Пусть далее (x_n) — последовательность линейных ограниченных операторов, заданных на соответствующих банаховых пространствах H_n со свойством $\sup_n \|x_n\| < \infty$. Определим на $(H_n)_{\mathscr{U}}$ оператор ультрапроизведения, полагая $(x_n)_{\mathscr{U}}[(h_n)_{\mathscr{U}})] = (x_n(h_n))_{\mathscr{U}}$. При таком определении оператор $(x_n)_{\mathscr{U}}$ является линейным и ограниченным и $\|(x_n)_{\mathscr{U}}\| = \lim_{\mathscr{U}} \|x_n\|$.

Хорошо известно ([5]), что классы банаховых алгебр и C^*-алгебр устойчивы относительно такого ультрапроизведения. Действительно, мультипликативная и инволютивная структуры ультрапроизведения задаются вполне естественно:

$$(x_n)_{\mathscr{U}} \cdot (y_n)_{\mathscr{U}} = (x_n \cdot y_n)_{\mathscr{U}},\ ((x_n)_{\mathscr{U}})^* = ((x_n)^*)_{\mathscr{U}}.$$

Чтобы получить содержательную теорию ультрапроизведения алгебр фон Неймана, конструкцию ультрапроизведения необходимо ещё немного подправить.

Определение 6. ([1]) *Пусть $(\mathscr{M}_n)$ — последовательность σ-конечных алгебр фон Неймана, φ_n — точное нормальное состояние на $\mathscr{M}_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим*

$$l^\infty(\mathbb{N}, \mathscr{M}_n) = \{(x_n), x_n \in \mathscr{M}_n : \sup_n \|x_n\| < \infty\},$$
$$\mathscr{N}_{\mathscr{U}}(\mathscr{M}_n, \varphi_n) = \{(x_n) \in l^\infty(\mathbb{N}, \mathscr{M}_n) : \lim_{\mathscr{U}} \varphi_n(x_n^* x_n + x_n x_n^*)^{\frac{1}{2}} = 0\},$$
$$\mathscr{M}_{\mathscr{U}}(\mathscr{M}_n, \varphi_n) = \{(x_n) \in l^\infty(\mathbb{N}, \mathscr{M}_n) : (x_n)\mathscr{N}_{\mathscr{U}}(\mathscr{M}_n, \varphi_n) \subset \mathscr{N}_{\mathscr{U}}(\mathscr{M}_n, \varphi_n), \mathscr{N}_{\mathscr{U}}(\mathscr{M}_n, \varphi_n)(x_n) \subset \mathscr{N}_{\mathscr{U}}(\mathscr{M}_n, \varphi_n)\}.$$

Ультрапроизведением последовательности алгебр фон Неймана с точным нормальными состояниями называется фактор-пространство $(\mathscr{M}_n, \varphi_n)_{\mathscr{U}} = \mathscr{M}_{\mathscr{U}}(\mathscr{M}_n, \varphi_n)/\mathscr{N}_{\mathscr{U}}(\mathscr{M}_n, \varphi_n)$. Наконец, определим состояние на $(\mathscr{M}_n, \varphi_n)_{\mathscr{U}}$: $\varphi_{\mathscr{U}}[(x_n)_{\mathscr{U}}] = \lim_{\mathscr{U}} \varphi_n(x_n)$.

Известно ([1]), что $(\mathscr{M}_n, \varphi_n)_{\mathscr{U}}$ является алгеброй фон Неймана с точным нормальным состоянием $\varphi_{\mathscr{U}}$.

Нам будет необходимо следующее понятие, введенное автором в [4]. Рассмотрим последовательность σ-конечных алгебр фон Неймана $\mathscr{M}_n$. Пусть φ_n и ψ_n – точные нормальные состояния на $\mathscr{M}_n,\ n \in \mathbb{N}$.

Определение 7. Последовательности (φ_n) и (ψ_n) называются взаимно контигуальными, если

$$\psi_n(x_n^* x_n) \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_n(x_n^* x_n) \to 0,\ x_n \in \mathscr{M}_n, \quad (n \to \infty).$$

Теорема 2. ([4]) *Пусть $(\mathscr{M}_n)$ – последовательность σ-конечных алгебр фон Неймана, φ_n и ψ_n – точные нормальные состояния на $\mathscr{M}_n,\ n \in \mathbb{N}$. Тогда последовательности (φ_n) и (ψ_n) взаимно контигуальны тогда и только тогда, если состояния $(\varphi_n)_{\mathscr{U}}$ и $(\psi_n)_{\mathscr{U}}$ эквивалентны для любого нетривиального ультрафильтра $\mathscr{U}$ на $\mathbb{N}$.*

Рассмотрим ультрапроизведение последовательности абелевых алгебр фон Неймана $(\mathscr{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ с заданными на $\mathscr{A}_n$ преобразованиями $\alpha_n^{s_n}$, $s_n \in G_n$ и точными нормальными состояниями φ_n. Положим $\alpha_{\mathscr{U}}^s((f_n)_{\mathscr{U}}) = (\alpha_n^{s_n}(f_n))_{\mathscr{U}}$.

Теорема 3. *В приведённых выше предположениях преобразование $\alpha_{\mathscr{U}}^s$ будет несингулярным и действие $\alpha_{\mathscr{U}}$ будет свободным, если последовательность $(s_n), s_n \in G_n$, выбирается таким образом, чтобы для проектора $f_n \in \mathscr{A}_n$, $\varphi_n(f_n) \to 0 \Leftrightarrow \varphi_n(\alpha_n^{s_n}(f_n)) \to 0$, $(n \to \infty)$.*

Литература

1. Ando H., Haagerup U. *Ultraproducts of von Neumann algebras* // Journal of Functional Analysis. – 2014. – V. 266. – № 12. – P. 6842–6913.

2. Chetcutti E., Hamhalter J. *Vitali-Hahn-Saks Theorem For Vector Measures on Operator Algebras* // The Quarterly Journal of Mathematics. – 2006. – V. 57. – P. 479-493.

3. Gudder S.P. *A Radon-Nikodym theorem for $*$-algebras* // Pacific Journal of Mathematics. – 1979. – V. 80. – № 1. – P. 141–149.

4. Haliullin S. *Contiguity and Entire Separability of States on von Neumann Algebras* // Int. J. Theor. Phys. – 2017. (в печати).

5. Heinrich S. *Ultraproducts in Banach space theory* // J. fur die reine und angewandte Math. – 1980. –V. 313, P. 72–104.

6. Ocneanu A. *Actions of discrete amenable groups on von Neumann algebras* // Lect. Notes in Math. – V. 1138. – New York / Berlin: Springer-Verlag, 1985.

7. Takesaki M. *Theory of Operator Algebras III*. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag, 2003. – 548 p.

NONSINGULAR TRANSFORMATIONS ON ULTRAPRODUCTS OF VON NEUMANN ALGEBRAS

S.G. Haliullin

We introduce the concept of ergodic action with respect to a normal state of group on an abelian von Neumann algebra and its properties are studied. Also ultraproduct of this actions is considered; here we apply the A. Ocneanu ultraproduct.

Keywords: ultraproducts, von Neumann algebras, nonsingular transformations.